Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ

Θεώρημα Taylor: $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $\bar{x} \in U$, $\bar{n} \in \mathbb{R}^n$ με $f \in C^{k+1}(U)$

$$\{\bar{x} + t\bar{n} : t \in [0,1] \subset U\}$$

$$\Rightarrow \exists \theta \in [0,1] : f(\bar{x}+\bar{n}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^{\alpha} f(\bar{x})}{\alpha!} \bar{n}^{\alpha} + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{D^{\alpha} f(x + \theta \bar{n})}{\alpha!}$$

Απόδειξη:

$$g(t) := f(x + t\bar{n}), \ t \in [0,1] \Rightarrow g \in C^{k+1}([0,1])$$

$$\Rightarrow \exists \theta \in [0,1] : g(1) = \sum_{m=0}^{k} \frac{g^{m}(0)}{m!} + \frac{g^{(k+1)}(0)}{k+1!}$$

όπου $g(x)$ με $x=1$, άρα στον τύπο είναι $x^m = 1^m = 1$.

αφού στην αμέσως προηγούμενη πρόταση είδαμε ότι:

$$g^{(k)}(t) = \sum_{|\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} D^{\alpha} f(\bar{x} + t\bar{n}) \cdot \bar{n}^{\alpha}$$

Πόρισμα: $f \in C^k(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό

$$\Rightarrow f(\bar{x} + \bar{n}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^{\alpha} f(\bar{x}) \cdot \bar{n}^{\alpha}}{\alpha!} + o(\|\bar{n}\|^k) \quad (\text{για } \bar{n} \to \bar{0})$$

και $g(\bar{n}) = h(\bar{n}) + o(\|\bar{n}\|)^k \quad (\text{για } \bar{n} \to \bar{0})$

* $D^{\alpha} f(\bar{x})$: η μερική παράγωγος τάξης α f στο x όπου παραγωγίζω α_i φορές ως προς x_i και α_n φορές ως προς x_n.

Γενική μορφή του $o(\|\bar{n}\|^k)$

$g(\bar{n}) = h(\bar{n}) + o(|k(\bar{n})|)$ για $\bar{n} \to \bar{0}$ $\Leftrightarrow$

$\lim_{\bar{n} \to \bar{0}} \frac{g(\bar{n}) - h(\bar{n})}{|k(\bar{n})|} = 0$ ← Συμβολισμός Landau

«μικρό - ο»

(little - small-o) (*)

*** Υπενθύμιση

$\boxed{\text{Big-O}}$

$f(\bar{n}) = g(\bar{n}) + O(|k(\bar{n})|)$ για $\bar{n} \to \bar{0}$

$\Rightarrow \exists c, \delta > 0 : \frac{f(\bar{n}) - g(\bar{n})}{|k(\bar{n})|} \leq C$ για $\bar{n} \in B(\bar{0}, \delta)$

(*) Δηλαδή με τον συμβολισμό Landau το όριο λέει

$$\lim_{\bar{n} \to \bar{0}} \frac{1}{\|\bar{n}\|^k} \left(f(\bar{x} + \bar{n}) - \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\Sigma D^\alpha f(\bar{x})}{\alpha!} \bar{n}^\alpha \right)$$

Απόδειξη:

Από το θεώρημα Taylor έχουμε:

$$f(\bar{x} + \bar{n}) = \sum_{|\alpha| \leq k-1} \frac{D^\alpha f(\bar{x})}{\alpha!} \bar{n}^\alpha + \sum_{|\alpha| = k} \frac{D^\alpha f(\bar{x} + \partial \bar{n})}{\alpha!} \bar{n}^\alpha =$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(\bar{x})}{\alpha!} \bar{n}^\alpha + \sum_{|\alpha| = k} \frac{D^\alpha f(\bar{x} + \partial \bar{n}) - D^\alpha f(\bar{x})\, \bar{n}^\alpha}{\alpha!} \overset{(*)}{=}$$

$= O(\|\bar{n}\|)^k$ για $\bar{n} \to \bar{0}$ $= o(\|\bar{n}\|^k)$ για $\bar{n} \to \bar{0}$

$(*) \Leftrightarrow \lim_{\bar{n} \to \bar{0}} \frac{|D^\alpha f(\bar{x} + \partial \bar{n}) \cdot D^\alpha f(\bar{x})| |\bar{n}^\alpha|}{\|\bar{n}\|^k} = \bar{0}$ όπου

$|\bar{n}^\alpha| = |n_1|^{\alpha_1} \cdots |n_n|^{\alpha_n}$ (κάθε όρος $\leq \|n\|$

→

άρα $|\bar{n}_1|^{a_1} \cdots |\bar{n}_n|^{a_n} \le \|n\|^{a_1+a_2+\dots+a_n}$

$$\boxed{\|\bar{n}\|^{|a|} = \|h\|^{k}}$$

$D^{a} f : U \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής! $\Rightarrow$ Συμπέρασμα

Διατυπώστε ως άσκηση

Έστω f, g ορισμένες : $B(\bar{0},\delta) \to \mathbb{R}$, $B(\bar{0},\delta) \subset \mathbb{R}^n$

$\delta > 0$ με ιδιότητες

- g φραγμένη.
- f συνεχής με $f(0)=0$ τότε:

$$\lim_{\bar{n}\to\bar{0}} f(\theta\bar{n})\, g(\bar{n}) = 0 \quad , \text{ όπου } \theta(\bar{n}) \in [0,1]$$

Ορισμός: Ο όρος:

$$\sum_{|\alpha|\le k} \frac{D^{\alpha} f(\bar{x})}{\alpha!}\, \bar{n}^{\alpha} = \sum_{m=0}^{k} \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^{\alpha} f(\bar{x}) \cdot \bar{n}^{\alpha}}{\alpha!}$$

ονομάζεται πολυώνυμο της μεταβλητής $\bar{n} = (n_1, \dots, n_n)$ βαθμού k της f στο $\bar{x}$.

Ας δούμε ποια είναι τα πολυώνυμα για $m=0$, $m=1$ και $m=2$

(1) Για $m=0$.

$$\sum_{|\alpha|=0} \frac{D^{\alpha} f(\bar{x})}{\alpha!} \bar{n}^{\alpha}. \Rightarrow \bar{\alpha}=\bar{0}=(0,0,\dots,0) \rightarrow$$

$$\sum_{|\alpha|=0} ⊛ = f(\bar{x}) \, (\underbrace{\bar{n}^{\alpha}}_{\rightarrow 1}) = f(\bar{x})$$

(2) Για $m=1$

$$\sum_{|\alpha|=1} \frac{D^{\alpha} f(\bar{x})}{\alpha!} \bar{n}^{\alpha} \rightarrow \alpha=(0,0,0,\dots,1,0,0,\dots,0)=\bar{e}_i$$

$$\sum_{|\alpha|=1} \frac{D^{\alpha} f(\bar{x})}{\alpha!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{D^{\bar{e}_i} f(\bar{x})}{\bar{e}_i!} \bar{n}^{e_i} \quad \text{με}$$

$$D^{\bar{e}_i} f(\bar{x}) = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}$$

(3) Για $m=2$

$$\sum_{|\alpha|=2} \frac{D^{\alpha} f(\bar{x})}{\alpha!} \bar{n}^{\alpha} \quad ⊛$$

$$\alpha=(0,0,\dots,0,2,0,\dots) \quad \text{ή} \quad \alpha=(0,\dots,\underset{i\text{-θέση}}{1},0,0,0,\dots,0,\underset{j\text{-θέση}}{1},0,\dots,0)$$

$\alpha=2e_i$, $i=1,\dots,\bar{n}$ $\vee$ $\alpha=\bar{e}_i+\bar{e}_j$

$\alpha=\bar{e}_i+\bar{e}_j$, $i,j=1,\dots,n$, $i\neq j$, $i<j$

Άρα ⊛ $$\sum_{\substack{i,j=1 \\ \text{με } i=j}}^{n} \frac{D^{\bar{e}_i+\bar{e}_j} f(\bar{x})}{(\bar{e}_i+\bar{e}_j)!} \bar{n}^{\bar{e}_i+\bar{e}_j} =$$

2 φορές παραγωγίζεται ως προς την i-μεταβλητή

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{D^{(2\bar{e}_i)}}{2\bar{e}_i} \bar{n}^{2e_i} + \frac{D^{\bar{e}_i+\bar{e}_j} f(\bar{x})}{\bar{e}_i+\bar{e}_j} \bar{n}^{\bar{e}_i+e_j} =$$

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 f(\bar{x})}{dx_i^2} n_i^2 \qquad \frac{d^2 f(\bar{x})}{dx_i dx_j} \qquad n_i n_j$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{d^2 f(x)}{dx_i^2} n_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \frac{d^2 f(\bar{x})}{dx_i dx_j} n_i n_j$$

(++)

$$= \frac{1}{2} \sum \frac{d^2 f(\bar{x})}{dx_i^2} n_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{d^2 f(\bar{x})}{dx_i dx_j} n_i n_j$$

(++) επειδή $i<j = i>j$ άρα παίρνω το μισό τους:

$$\frac{1}{2} \sum \dots + \frac{1}{2} \sum \dots = \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{D^2 f(\bar{x})}{dx_i dx_j} n_i n_j \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \bar{n} \begin{pmatrix} \frac{d^2 f(\bar{x})}{dx_1^2} & \frac{d^2 f(\bar{x})}{dx_2 dx_1} & \cdots & \frac{d^2 f(\bar{x})}{dx_n dx_1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{d^2 f(\bar{x})}{dx_1 dx_n} & & \cdots & \frac{d^2 f(\bar{x})}{dx_n^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_n \end{pmatrix} \rightarrow \bar{n}$$

όπου $H_f(\bar{x})$ ο Εσσιανός πίνακας, ο οποίος για $f \in C^2(U)$ είναι συμμετρικός

Πόρισμα - Θεώρημα:

Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $\bar{x} \in U$ τότε:

(α) Έστω f συνεχής στο $\bar{x} \in U$ (ειδικότερα αν $f \in C(U)$)
έχουμε $f(\bar{x}+\bar{h}) = f(\bar{x}) + o(\|\bar{h}\|^0)$ για $\bar{h} \to 0$

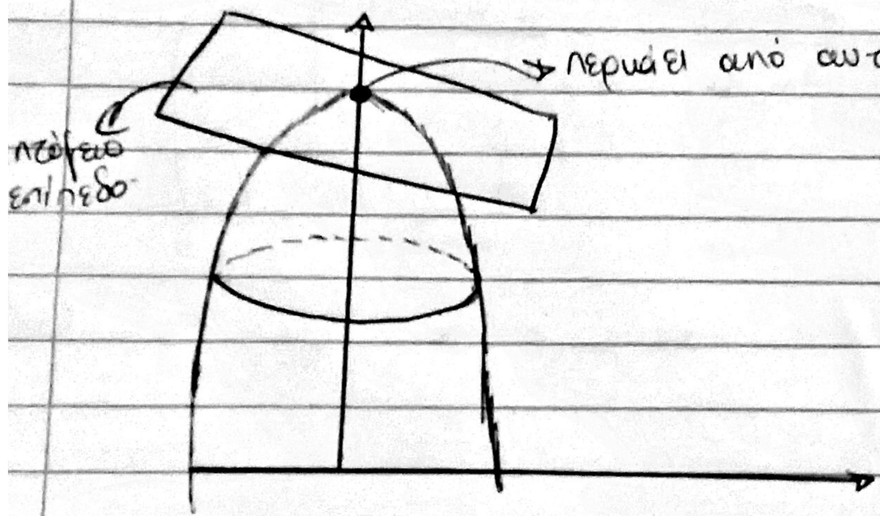
(Για $\bar{h} = \bar{0}$?) $\to \lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \left(f(\bar{x}+\bar{h}) - f(\bar{x}) = 0 \right)$

(β) Αν $f \in C^1(U)$ έχουμε:
$f(\bar{x}+\bar{h}) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}) \bar{h} + o(\|\bar{h}\|)^1$ για $\bar{h} \to \bar{0}$

$$\to \lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \frac{f(\bar{x}+\bar{h}) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{h}}{\|\bar{h}\|} = 0$$

($\to$ f διαφορίσιμη στο x)

● Εφαπτόμενο επίπεδο επίπεδο της f στο $\bar{x}$



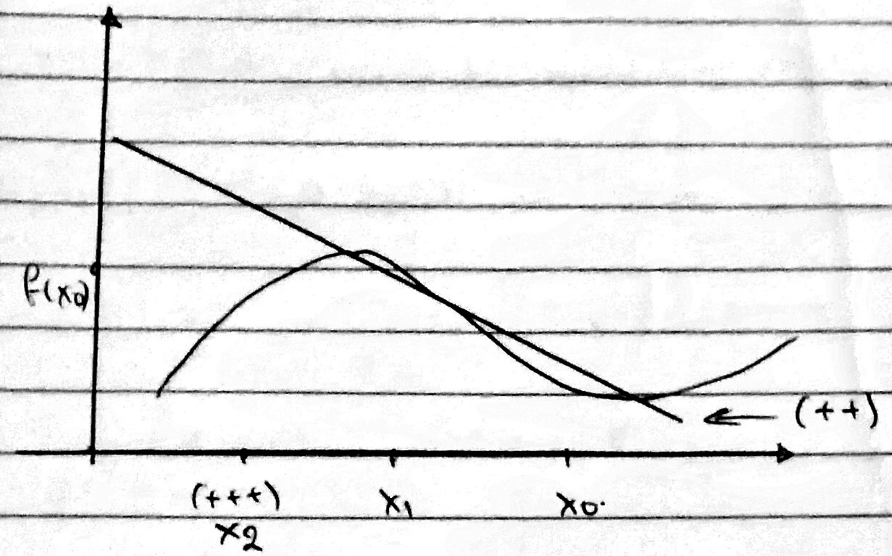
(γ) αν $f \in C^2(U)$ τότε έχουμε

$$f(\bar{x}+\bar{h}) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}) \bar{h} + \frac{1}{2} \bar{h}^T H_f(\bar{x}) + o(\|\bar{h}\|)^2.$$

Βέλτιστη προσέγγιση της f τοπικά στο $\bar{x}$
από πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού

Παρατήρηση

① Τα πολυώνυμα Taylor είναι τοπικά στο $\bar{x}$ όλο και πιο καλές προσεγγίσεις της f στο $\bar{x}$ δηλ. (για $n=1$)



(+) Προσέγγιση $(t\ f'(x_0)(x-x_0)$ 0-κής τάξης

(++) $y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$ προσέγγιση της $1^{ης}$-τάξης

(+++) Προσέγγιση $2^{ης}$ - τάξης

$$y = f(x_2) + f'(x_2)(x-x_2) + \frac{1}{2} f''(x_2)(x-x_2)^2.$$

$g(\bar{n}) = o(\|\bar{n}\|^k)$ για $\bar{n} \to \bar{0} \longleftrightarrow \lim_{\bar{n}\to\bar{0}} \left(\frac{g(\bar{n})}{\|\bar{n}\|^k}\right) = 0$

$$\lim_{\bar{n}\to\bar{0}} \frac{g(\bar{n})}{\|\bar{n}\|^m} = \lim_{\bar{n}\to\bar{0}} \frac{g(\bar{n})}{\|\bar{n}\|^k} \Bigg) \Bigg(\lim_{\bar{n}\to\bar{0}} \frac{\|\bar{n}\|^k}{\|\bar{n}\|^m} \Bigg| = 0$$

② Μπορεί το θεώρημα Taylor να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό ορίων $\longrightarrow$ δες για Ασκήσεις.

Τοπικά και Ολικά Ακρότατα

Ορισμός: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Η $f: U \to \mathbb{R}$ έχει στο σημείο $\bar{x} \in U$

- Τοπικό Ελάχιστο $\leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\forall \bar{y} \in B(\bar{x}, \varepsilon) \cap U): f(\bar{x}) \leq f(\bar{y})$
- Γνήσιο Τοπικό Ελάχιστο $(\exists \varepsilon > 0)(\forall \bar{y} \in (B(\bar{x}, \varepsilon) \cap U \setminus \{\bar{x}\})): f(\bar{x}) < f(\bar{y})$
- Ολικό Ελάχιστο $\forall \bar{y} \in U,\ f(\bar{x}) \leq f(\bar{y})$
- Γνήσιο Ολικό Ελάχιστο $\forall \bar{y} \in U \setminus \{\bar{x}\}: f(\bar{x}) \leq f(\bar{y})$

Αντίστοιχα για το μέγιστο.

Μέγιστο και Ελάχιστο αποκαλούνται ακρότατα.

▶ Το $\bar{x}$ αποκαλείται σημείο ακροτάτου και δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδικό.

Αναγκαία Συνθήκη Τοπικού Ακροτάτου

Θεώρημα: $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό

$f: U \to \mathbb{R}$, $\bar{x}$ τοπικό ακρότατο (σημείο)

και f μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x}$, δηλαδή $\exists \nabla f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = 0$

Απόδειξη:

Έστω $c > 0$, $B(\bar{x}, c) \subset U$

Οι συναρτήσεις $g_i : (-c, c) \to \mathbb{R}$, $g_i(t) = f(\bar{x} + t\bar{e}_i)$

Είναι διαφορίσιμες στο $t = 0$ (Γιατί;)

$g_i'(t) = \dfrac{g_i(t) - g_i(0)}{t} = \dfrac{f(\bar{x})(\bar{e}_i) - f(\bar{x})}{t}$ μερική παράγωγο.

$g_i(0) = \dfrac{df}{dx_i}(\bar{x})$, όπου έχω τοπικό ακρότατο

Διαφορίσιμη + τοπικό ακρότατο $\xrightarrow{\text{Fermat}} g_i(0) = \dfrac{df(\bar{x})}{dx_i} = 0 \quad \forall i = 1, \ldots$

Προσοχή! Το προηγούμενο ισχύει μόνο αν $\bar{x} \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό
και $\exists \nabla f(\bar{x})$

Ικανό κριτήριο

Θεώρημα: $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f \in C^2(U)$, $\bar{x} \in U$ και $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

(α) $Hf(\bar{x})$, $\mathbb{R}^{n \times n}$ θετικά ορισμένος.
($\Rightarrow$) η f έχει στο $\bar{x}$ γνήσιο τοπικό ελάχιστο

(β) Αρνητικά ορισμένος.
($\Rightarrow$) Η f έχει στο $\bar{x}$ γν. τοπικό μέγιστο

(γ) $Hf(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Μη-ορισμένος.
($\Rightarrow$) Η f δεν έχει ακρότατο στο $\bar{x}$ αλλά σαγματικό σημείο

Δ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ θετικά ορισμένος $\bar{x}^T A \bar{x} > 0$, $\forall \bar{x} \neq \bar{0}$ ($\Rightarrow$)
έχει όλες τις ιδιοτιμές θετικές

Δ Μη-ορισμένος.
$\exists \bar{x}_1, \bar{x}_2$ $\quad \bar{x}_1^T A \bar{x}_1 > 0$
$\bar{x}_2^T A \bar{x}_2 < 0$

($\Rightarrow$) $\exists$ αρνητικές και θετικές ιδιοτιμές.